

ENSTA

# Transferts thermiques dans les processus énergétiques

Partie IV

TRANSFERTS THERMIQUES

## Echanges convectif en écoulement permanent

## 1 Définitions

### 1.1 Puissance thermique et flux surfacique

Soit la puissance  $d\Phi$  (W) traversant algébriquement une surface élémentaire  $dA$ , orientée par une normale  $\underline{n}$ . Cette puissance est appelée flux d'énergie passant à travers  $dA$ . Elle s'écrit en fonction du vecteur flux surfacique d'énergie  $\underline{q}$ , défini par :

$$d\Phi = \underline{q} \cdot \underline{n} dA$$

On appelle flux surfacique algébrique d'énergie à travers la surface  $dA$ , la quantité  $\varphi$  (W/m<sup>2</sup>) définie par :

$$\varphi = \underline{q} \cdot \underline{n}$$

Pour chaque mode de transfert (conductif, convectif et radiatif), on définit les quantités  $d\Phi$ ,  $\underline{q}$  et  $\varphi$ .

### 1.2 Bilan d'énergie

Bilan d'énergie pour un transfert stationnaire et sans mouvement : on considère un volume de contrôle matériel  $\Omega$  indéformable et limité par sa surface  $\partial\Omega$ . Le bilan énergétique s'écrit :

$$\int_{\partial\Omega} -\underline{q} \cdot \underline{n} dA + \int_{\Omega} P d\Omega = 0$$

où  $\underline{n}$  désigne la normale extérieure au volume de contrôle,  $\underline{q}$  le vecteur flux surfacique (conductif, convectif ou radiatif suivant les cas) et  $P$  est la puissance dégagée (elle est comptée positivement si elle correspond à un échauffement du système, ce qui est, en général, le cas).

Bilan d'énergie pour le transfert de chaleur instationnaire dans un fluide en mouvement : on considère un volume de contrôle matériel  $\Omega$  et limité par sa surface  $\partial\Omega$ . Le bilan énergétique s'écrit :

$$\frac{dH}{dt} = \int_{\partial\Omega} -\underline{q} \cdot \underline{n} dA + \int_{\Omega} P d\Omega$$

où  $H$  représente l'enthalpie contenue dans le volume de contrôle matériel  $\Omega$  :

$$H = \int_{\Omega} h d\Omega$$

avec  $h$  l'enthalpie spécifique. Pour un solide, un liquide ou un gaz parfait on a  $dh = \rho C_p dT$ , on en déduit donc, d'après le théorème de Leibnitz, la forme la plus utilisée du bilan d'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \rho C_p T d\Omega \right] \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial [\rho C_p T]}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho C_p T \underline{u} \cdot \underline{n} dA \\ &= \int_{\partial\Omega} -\underline{q} \cdot \underline{n} dA + \int_{\Omega} P d\Omega \end{aligned}$$

On peut aussi transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume, ce qui donne :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial [\rho C_p T]}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\rho C_p T \underline{u}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} -\underline{q} \cdot \underline{n} dA + \int_{\Omega} P d\Omega$$

En utilisant l'équation de bilan masse  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u})$  et si on suppose  $C_p$  constant, il vient :

$$\int_{\Omega} \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}}T \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} -\underline{q} \cdot \underline{n} dA + \int_{\Omega} P d\Omega$$

### 1.3 Les différentes expressions du flux surfacique

Flux conductif

$$\underline{q}^{\text{cd}} = -\lambda(T) \underline{\text{grad}}T$$

Flux convectif

Soit une paroi solide léchée par un fluide en mouvement en l'absence de transferts radiatifs. Le flux surfacique conductif à la paroi, côté solide, s'écrit en fonction de la température et de la conductivité du solide :

$$\varphi^{\text{cd}}|_{\text{paroi},s} = -\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial y}|_{\text{paroi},s}$$

Du côté du fluide, à la paroi la vitesse est nulle, donc, le flux à la paroi est également de nature purement convectif, et il s'écrit en utilisant la conductivité et la température du fluide :

$$\varphi^{cd}|_{\text{paroi};f} = -\lambda_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{\text{paroi};f}$$

Par continuité du flux, on a :

$$-\lambda_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial y} \right|_{\text{paroi};s} = -\lambda_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{\text{paroi};f}$$

La température est également continue à la paroi. Cependant, la détermination du gradient de température dans le fluide  $\frac{\partial T_f}{\partial y}$  est un problème difficile qui demande la résolution couplée de l'équation de température dans le fluide et dans le solide. Le flux à la paroi, côté fluide, résulte en particulier d'un couplage entre la conduction et la convection. Par abus de langage on a l'habitude de l'appeler flux convectif (en réalité c'est un flux thermo-convectif). En écoulement turbulent en conduite, on verra plus loin qu'il existe, au voisinage immédiat de la paroi, une zone où la variation de température est très rapide en fonction de la distance à la paroi. On notera  $\delta$  l'épaisseur de cette couche limite. A l'extérieur de cette couche limite, le profil de température est très plat. On peut donc approcher le flux convectif par :

$$\begin{aligned} \varphi^{cd}|_{\text{paroi};f} &= \varphi^{cv}|_{y=0} = -\lambda_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{y=0} \\ &= -\lambda_f \frac{(T_m - T_p)}{\delta} \\ &= h(T_p - T_m) \end{aligned}$$

Le coefficient  $h$  ( $\text{W}/\text{m}^2/\text{K}$ ) s'appelle coefficient d'échange (ou coefficient de transfert convectif) à la paroi. En général, il dépend des propriétés thermophysiques du fluide et de la nature de l'écoulement, mais pas de la nature de la paroi. On verra plus loin qu'en géométrie fermée, lorsque la température ne varie pas trop,  $h$  peut être considéré comme constant en première approximation.

On généralise ce résultat pour une paroi à la température  $T_p$  placée dans un fluide à une température  $T_m$ , en régime permanent, en admettant que le flux convectif reçu par le fluide se linéarise toujours sous la forme :

$$\varphi = h(T_p - T_m)$$

#### 1.4 Nombres sans dimension utilisés pour les transferts thermiques

Nombre de Nusselt :

$$\text{Nu} = \frac{h d}{\lambda} = \frac{\text{flux convectif}}{\text{flux conductif correspondant au même écart de température}}$$

NB : pour un régime purement conductif ( $U = 0$ ) on a bien évidemment  $\text{Nu} = 1$ .

Nombre de Stanton (ou nombre de Margoulis) :

$$\text{St} = \text{Ma} = \frac{h}{\rho C_p U} = \frac{\text{Nu}}{\text{Re} \times \text{Pr}} = \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}}$$

Dans les corrélations, le nombre de Nusselt est donné en fonction des nombres sans dimension du problème. Par exemple, pour une couche limite thermique :

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}, \text{Fr})$$

Conditions aux limites

Les différentes conditions aux limites en paroi :

- flux imposé en paroi
- température imposée en paroi

La forme de la relation  $\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}, \text{Fr})$  peut être différente suivant le type de conditions aux limites.

## 1.5 Résistance thermique

Soit  $\Phi$  la puissance thermique échangée pour un écart de température  $\delta T$ , on appelle résistance thermique la quantité  $\mathfrak{R}$  définie par :

$$\Phi = \frac{1}{\mathfrak{R}} \delta T$$

ou encore :

$$\delta T = \mathfrak{R} \Phi$$

Résistance thermique lié aux échanges convectifs avec une paroi plane de surface  $A$  :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{h A}$$

Résistance thermique liée aux échanges convectifs dans un tube de rayon  $R$  (exprimée par unité de longueur de tube) :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2\pi R h}$$

Résistance thermique associée aux échanges conductifs entre deux parois verticales de surface  $A$  et distantes de  $e$  :

$$\mathfrak{R} = \frac{e}{\lambda A}$$

Résistance thermique associée aux échanges conductifs dans un espace annulaire définis par les rayons  $R_1 < R_2$  (exprimée par unité de longueur de l'espace annulaire) :

$$\mathfrak{R} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda}$$

Additivité des résistances thermiques : Si on considère un milieu dans lequel transite, en régime permanent, une puissance thermique  $\Phi$ , on peut le représenter comme une série de points où la température est connue et reliés entre eux par des résistances thermiques. On a alors :

$$\delta T_{\text{total}} = \sum_i \delta T_i = \sum_i \mathfrak{R}_i \Phi = \left( \sum_i \mathfrak{R}_i \right) \Phi = \mathfrak{R}_{\text{eq}} \Phi$$

## 2 Convection forcée

### 2.1 Définition

Régime piloté par l'inertie, i.e., la dynamique de l'écoulement :  $Fr$  très grand, donc on peut négliger les forces de flottabilité dues aux différences de densité dans l'écoulement.

### 2.2 Convection forcée en régime laminaire

Écoulement laminaire établi dans un tube de diamètre  $D$  :

$$u(r) = 2U \left( 1 - \frac{4r^2}{D^2} \right)$$

$$\begin{cases} \lambda_c = \frac{64}{Re} \\ C_f = \frac{16}{Re} \end{cases}$$

Dans le cas le plus général, on définit la température de mélange dans une section de conduite par :

$$T_m(x) = \frac{\int_{A(x)} \rho C_p u T dA}{\int_{A(x)} \rho C_p u dA}$$

Si de plus  $C_p$  est constant cette définition se simplifie et donne :

$$T_m(x) = \frac{\int_{A(x)} \rho u T dA}{\int_{A(x)} \rho u dA} = \frac{1}{\dot{m}} \int_{A(x)} \rho u T dA$$

ce qui peut encore se simplifier si de plus  $\rho = \text{constante}$  :

$$T_m(x) = \frac{\int_{A(x)} u T dA}{\int_{A(x)} u dA} = \frac{1}{AU} \int_{A(x)} u T dA$$

Considérons le volume matériel  $\Omega$  contenu dans une conduite de section constante entre les sections  $x$  et  $x + dx$ . Soit  $dH$  l'enthalpie correspondante. On a vu plus haut que :

$$\frac{d}{dt}(dH) = \int_{\Omega} \frac{\partial [\rho C_p T]}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho C_p T \underline{u} \cdot \underline{n} dA$$

En régime permanent, on a :

$$\frac{d}{dt}(dH) = \int_{\partial\Omega} \rho C_p T \underline{u} \cdot \underline{n} dA$$

Le champ de vitesse dans la conduite est axial (on note  $u$  la vitesse suivant l'axe  $x$  de la conduite), de plus, sur la paroi qui limite le volume de contrôle, la vitesse est nulle. On a donc, si  $C_p$  est constant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dH) &= \int_{S_{x+dx}} \rho C_p u T|_{x+dx} dA - \int_{S_x} \rho C_p u T|_x dA \\ &= \frac{d}{dx} \left( \int_A \rho C_p u T dA \right) dx \\ &= C_p d \left( \int_A \rho u T dA \right) \end{aligned}$$

Soit en définitive :

$$\frac{d}{dt}(dH) = \dot{m} C_p dT_m$$

Cette expression, est formellement identique à celle relative à un solide. Elle est particulièrement remarquable pour un gaz.

Hypothèse 1 : il existe un régime thermiquement établi, i.e., un régime pour lequel :

$$\frac{T_p(x) - T(x, r)}{T_p(x) - T_m(x)} = f(r)$$

Hypothèse 2 : on néglige la conduction axiale devant les échanges convectifs avec la paroi.

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{T_p - T}{T_p - T_m} \right)_{r=\frac{D}{2}} = \text{constante}$$

$$\text{Nu} = \frac{hD}{\lambda} = \text{constante}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_p}{dx} - \frac{T_p - T}{T_p - T_m} \frac{dT_p}{dx} + \frac{T_p - T}{T_p - T_m} \frac{dT_m}{dx}$$

A flux imposé, constant, en paroi :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_p}{dx} = \frac{dT_m}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{dT_m}{dx} \text{ indépendant de } r$$

Bilan d'énergie sur une tranche de conduite :

$$\varphi = \rho C_p \frac{D}{4} U \frac{dT_m}{dx}$$

$$T_m(x) = T_p(x) - \frac{11}{96} \frac{2U}{\kappa} \frac{dT_m}{dx} \frac{D^2}{4}$$

$$\varphi = h \frac{11}{96} \frac{2U}{\kappa} \frac{dT_m}{dx} \frac{D^2}{4} = \rho C_p \frac{D}{4} U \frac{dT_m}{dx}$$

$$\text{Nu} = \frac{hD}{\lambda} = \frac{48}{11} = 4.3636$$

Section	Nu à flux imposé	Nu à température imposée
carrée	3.61	2.98
plans infinis	8.235	7.54

## 2.3 Convection forcée en régime turbulent

Écoulement turbulent établi dans un tube de diamètre  $D$  :

Sous-couche en conduction :

$$T_p - \bar{T}(y) = \frac{\varphi}{\lambda} y$$

Zone logarithmique :

$$\bar{T}(y) = \frac{-\varphi \text{Pr}_t}{K \rho C_p u_*} \ln \left( \frac{y u_*}{\nu} \right) + \text{constante}$$

Hypothèse de régime thermiquement établi.

Analogie de Reynolds : fluide idéal tel que  $\text{Pr} = 1$  et avec  $\text{Pr}_t = 1$  : dans ce cas on a similitude entre les profils de vitesse et de température :

$$\begin{cases} (\nu + \nu_t) \frac{d}{dy} \left( \frac{\bar{u}}{u_*^2} \right) = 1 \\ \frac{\bar{u}}{u_*^2} \Big|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (\nu + \nu_t) \frac{d}{dy} \left( \frac{\rho C_p (T_p - \bar{T})}{\varphi} \right) = 1 \\ \frac{\rho C_p (T_p - \bar{T})}{\varphi} \Big|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{\rho C_p (T_p - \bar{T}(y))}{\varphi} = \frac{\bar{u}(y)}{u_*^2}$$

soit :

$$\frac{\varphi}{(T_p - \bar{T}_m)} = h = \frac{\rho C_p u_*^2}{U}$$

avec, puisque  $Pr = 1$  :

$$\nu \rho C_p = \lambda$$

soit :

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} = \frac{u_*^2 D}{U \nu} = \frac{1}{8} \frac{8 u_*^2 U D}{U^2 \nu} = \frac{\lambda_c}{8} Re$$

En régime turbulent lisse,  $\lambda_c$  est donné par la loi de Blasius :

$$\lambda_c = 0.184 \times Re^{-0.2}$$

On en déduit donc la corrélation :

$$Nu = 0.023 \times Re^{0.8}$$

Écoulement turbulent établi en conduite pour un fluide dont le nombre de Prandtl est différent de 1 :

Corrélation de Colburn (valable que l'on soit à température ou à flux imposé, pour un régime établi, i.e.,  $10$  à  $15 \times D_H$  après l'entrée de la conduite et pour un écoulement en charge dans la conduite) :

$$Nu = 0.023 \times Re^{0.8} \times Pr^{1/3}$$

Corrélation de Dittus-Boelter (valable pour les fluides non métalliques avec  $0.7 < Pr < 120$  et  $10^4 < Re < 1.2 \times 10^5$ ) :

$$Nu = 0.023 \times Re^{0.8} \times Pr^{0.4}$$

Corrélation de Sieder et Tate (si  $\mu$  varie avec la température) :

$$Nu = 0.023 \times Re^{0.8} \times Pr^{1/3} \times \left( \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_p)} \right)^{0.14}$$

Le cas des métaux liquides (Kutateladze), pour  $Pe < 2 \times 10^4$  et  $Re < 10^6$  :

$$Nu = Nu_0 + 0.025 \times Pe^{0.8}$$

$Nu_0 = 7$  si on est à flux constant en paroi,  $Nu_0 = 4.8$  si on est à température constante en paroi.

Couche limite sur une plaque plane

La transition entre le régime laminaire et le régime turbulent se produit pour :

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu} = 3 \times 10^5 \text{ à } 10^6$$

Écoulement

Fluides non métallique  $10 > Pr > 0.5$

Fluides métalliques

Laminaire  $Re = \frac{UL}{\nu} < 3 \times 10^5$

$\bar{Nu} = 0.628 \times Re^{0.5} \times Pr^{1/3}$

$\bar{Nu} = 1.1 \sqrt{(1 - Pr^{1/3}) Pe}$

Turbulent  $Re > 5 \times 10^5$

$\bar{Nu} = 0.035 \times Re^{0.8} \times Pr^{1/3}$

$\bar{Nu} = 0.59 \times Pe^{0.61}$

### 3 Convection naturelle

#### 3.1 Introduction

Le seul moteur de l'écoulement est la différence de température entre le fluide environnant et la paroi.

$$Nu = f(Gr, Pr)$$

avec :

$$Gr = \frac{g \beta \delta T d^3}{\nu^2}$$

#### 3.2 Cavité à plafond chauffant

pas de mouvement du fluide  $\Rightarrow Nu = 1$

### 3.3 Cavité avec plancher chauffant

la convection naturelle apparait lorsque  $Ra > 1700$  avec :

$$Ra = Gr \times Pr = \frac{g \beta \delta T d^3}{\nu \kappa}$$

La transition entre le régime laminaire et le régime turbulent se produit pour  $Ra_c = 10^4$     $10^5$  pour les fluides non métalliques usuels.

Liquides non métalliques ( $1 < Pr < 20$ ) :

$$\begin{array}{ll} 3.7 \times 10^5 < Ra < 10^8 & Nu = 0.13 \times Ra^{0.3} \\ Ra > 10^8 & \text{turbulent } Nu = 0.057 \times Ra^{1/3} \end{array}$$

Pour les gaz ( $0.5 < Pr < 2$ ) :

$$\begin{array}{ll} 1700 < Ra < 7000 & \text{laminaire } Nu = 0.059 \times Ra^{0.4} \\ 7000 < Ra < 3.2 \times 10^5 & \text{laminaire } Nu = 0.212 \times Ra^{1/4} \\ 3.2 \times 10^5 < Ra & \text{turbulent } Nu = 0.061 \times Ra^{1/3} \end{array}$$

Métaux liquides (Kutateladze) : pour les métaux liquides le  $Ra_c$  est très faible ce qui fait que le régime de convection naturelle laminaire n'existe pratiquement pas.

$$Nu = 0.17 \times (Ra \times Pr)^{1/3}$$

NB : dans les expressions ci-dessus  $Ra$  doit être évalué en utilisant pour  $\delta T$  la différence de température de plaque à plaque.

NB : Pour un exposant  $1/3$  le coefficient d'échange  $h$  devient indépendant de la dimension caractéristique de la distance de plaque à plaque  $d$ .

### 3.4 Plaque chauffée par le dessus ou par ou refroidies le dessous

Corrélations de McAdams

$$\begin{array}{ll} 10^5 < Ra < 2 \times 10^7 & \text{laminaire } Nu = 0.54 \times Ra^{1/4} \\ 2 \times 10^7 < Ra < 3 \times 10^{10} & \text{turbulent } Nu = 0.14 \times Ra^{1/3} \end{array}$$

Plaque chauffée par le dessous ou refroidie par le dessus :

$$3 \times 10^5 < Ra < 3 \times 10^{10} \quad Nu = 0.27 \times Ra^{1/4}$$

NB : dans les expressions ci-dessus,  $Ra$  doit être évalué en utilisant pour  $\delta T$  la différence de température entre le fluide ambiant et la paroi.

### 3.5 Plaque verticale chauffée ou refroidie, cylindre d'axe vertical

la transition laminaire/turbulente se produit pour  $Gr_z \sim 10^9$ .

En laminaire à température imposée :

$$Nu_z = 0.508 \frac{Pr^{1/2} \times Gr_z^{1/4}}{(0.95 + Pr)^{1/4}} \quad \text{et} \quad \bar{Nu} = 0.677 \frac{Pr^{1/2} \times Gr_z^{1/4}}{(0.95 + Pr)^{1/4}}$$

En laminaire à flux imposé :

$$Nu_z = 0.616 \frac{Pr^{2/5} \times Gr_z^{1/4}}{(0.8 + Pr)^{1/5}} \quad \text{et} \quad \bar{Nu} = 0.77 \frac{Pr^{2/5} \times Gr_z^{1/4}}{(0.8 + Pr)^{1/5}}$$

En turbulent pour l'écoulement de convection naturelle le long d'une plaque verticale ou à l'extérieur d'un cylindre à axe vertical en milieu ouvert ( $Gr > 10^9$ ) :

En turbulent (corrélation de McAdams, applicable dans les gaz et les liquides non métalliques usuels, vérifiée pour  $Ra < 10^{12}$ ) et pour les gaz et les liquides non métalliques :

$$\bar{Nu} = 0.13 \times Ra^{1/3}$$

En turbulent pour les métaux liquides (corrélation de Kutateladze) :

$$\bar{Nu} = 0.16 \times (Gr \times Pr^2)^{1/3}$$

### 3.6 Echange entre les deux parois verticales, parallèles et maintenues à température constante d'une cavité fermée

Ici l'échelle de longueur à prendre en compte dans l'évaluation des nombres sans dimension est la distance entre les deux parois verticales.

Liquides non métallique ( $1 < Pr < 20$  et  $1 < H/d < 40$ ) :

$$10^6 < Ra < 10^9 \quad \text{turbulent} \quad Nu = 0.046 \times Ra^{1/3}$$

Gaz ( $0.5 < Pr < 2$  et  $3 < H/d < 42$ ) :

$Ra < 2000$	Laminaire	$Nu = 1$
$6000 < Ra < 2 \times 10^5$	laminaire	$Nu = 0.197 \times Ra^{1/4} \left(\frac{H}{d}\right)^{-1/9}$
$2 \times 10^5 < Ra < 1.1 \times 10^7$	turbulent	$Nu = 0.073 \times Ra^{1/3} \left(\frac{H}{d}\right)^{-1/9}$

## 4 L'ailette et l'approximation de l'ailette

### 4.1 Introduction

La plupart des échangeurs de chaleur sont pourvus d'ailettes car ces dernières favorisent les transferts de chaleur. Considérons en effet une surface  $\Sigma$ , supposée à la température  $T_0$ , placée dans un fluide ambiant à la température  $T_a$ . Cette surface échange avec l'extérieur la puissance thermique :

$$\Phi = \Sigma h (T_0 - T_a)$$

Si maintenant on remplace cette surface par une ailette dont la base correspond à la surface  $\Sigma$ . Il y a maintenant conduction dans l'ailette et échange convectif sur sa surface extérieure (on supposera que la surface de l'ailette est suffisamment réfléchissante pour que le flux thermique rayonné soit négligeable). Comme on va le montrer dans la suite, la présence de l'ailette améliore l'échange thermique en augmentant la surface de transfert. On définit l'efficacité de l'ailette de la façon suivante :

$$\eta = \frac{\text{flux conductif échangé à travers } \Sigma \text{ en présence de l'ailette}}{\text{flux convectif échangé à travers } \Sigma \text{ en l'absence de l'ailette}}$$

$\eta$  est en fait le rapport du flux dissipé par l'ailette, au flux que dissiperait, dans les mêmes conditions extérieures, la base nue (en l'absence d'ailette). Le problème est de rendre  $\eta$  le plus grand possible, au moindre coût.

NB : certains auteurs préfèrent la définition suivante de l'efficacité de l'ailette :

$$\eta' = \frac{\text{flux dissipé par l'ailette}}{\text{flux dissipé par l'ailette si toute sa surface était à la même température que sa base}}$$

### 4.2 Approximation de l'ailette

On fait les hypothèses suivantes :

- le régime est permanent,
- $\lambda$  et  $h$  ne dépendant pas de  $T$ .

Dans l'ailette on a un régime purement conductif régi par l'équation :

$$\lambda \Delta T = 0$$

Avec les conventions d'axe définies sur la figure, et en supposant l'ailette de dimension infinie dans la direction  $y$ , on a :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

de part les symétries du problème (tant géométriques que thermiques), on peut ramener l'étude à une demi-ailette. Si on peut négliger le rayonnement, les conditions aux limites sont alors :

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, z) = 0 & \text{(symétrie en } x = 0) \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(a, z) = h(T(a, z) - T_a) & \text{(échange convectif en } x = a, \text{ surface latérale de l'ailette)} \\ T(x, 0) = T_0 & \text{(température imposée à la base de l'ailette en } z = 0) \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(x, c) = h(T(x, c) - T_a) & \text{(échange convectif en } z = c, \text{ extrémité de l'ailette)} \end{cases}$$

On peut résoudre numériquement l'équation précédente avec ses conditions aux limites. Les méthodes des différences finies ou des éléments finis se prêtent bien à cette résolution. On va en chercher une solution analytique en procédant à ce qu'on appelle l'approximation de l'ailette. On commence par adimensionnaliser l'équation et conditions aux limites. Pour cela, on pose :

$$\begin{cases} x^+ = \frac{x}{a} \\ z^+ = \frac{z}{c} \\ T^+ = \frac{T - T_a}{T_0 - T_a} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{+2}} T^+(x^+, z^+) + \frac{\partial^2}{\partial z^{+2}} T^+(x^+, z^+) = 0$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial T^+}{\partial x^+}(0, z^+) = 0 \\ \frac{\partial T^+}{\partial x^+}(1, z^+) + \frac{ha}{\lambda} T^+(1, z^+) = 0 \\ T^+(x^+, 0) = 1 \\ \frac{\partial T^+}{\partial z^+}(x^+, \varepsilon) + \frac{ha}{\lambda} T^+(x^+, \varepsilon) = 0 \end{cases}$$

Une fois mises sous cette forme les équations du problème, on constate que l'on peut faire l'étude en utilisant les lois de similitude. On voit également apparaître les nombres sans dimension importants. Il s'agit ici, en particulier, du nombre de Biot défini par :

$$\text{Bi} = \frac{ha}{\lambda} = \frac{h\delta T}{\lambda \frac{\partial T}{\partial x}} = \frac{\text{flux convectif}}{\text{flux conductif}}$$

Dans les échangeurs de chaleur, les matériaux choisis sont de bons conducteurs de chaleur, donc  $\lambda$  est élevé. De plus, dans certains dispositifs, les échanges se font principalement par convection naturelle, donc avec des coefficients d'échange  $h$  relativement faibles. Si on considère une portion d'ailette, elle est parcourue par un flux conductif  $\varphi_{cd}$ , et elle échange par ses parois externes un flux convectif  $\varphi_{cv}$ . On a

$$\begin{cases} \varphi_{cd} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \\ \varphi_{cv} = h(T - T_a) \\ \frac{\varphi_{cv}}{\varphi_{cd}} \ll 1 \end{cases}$$

A la limite, si  $\varphi_{cv} = 0$ , les portions d'ailette peuvent être considérées comme isolées latéralement. On a alors une distribution de température linéaire en  $z$  dans l'ailette, les isothermes étant constituées des plans  $z = \text{constante}$ . Si  $\varphi_{cv} \ll \varphi_{cd}$ , les isothermes ne sont pas rigoureusement confondues avec les plans  $z = \text{constante}$ , mais on considérera qu'on peut négliger cet écart. Il s'agit de ce qu'on appelle l'approximation de l'ailette. Elle permet de considérer que  $T$  ne dépend en fait que de  $z$ .

Etablissons l'équation que doit vérifier  $T(z)$  dans le cadre de l'approximation de l'ailette. Pour cela, on va effectuer un bilan d'énergie entre deux plans de cote  $z$  et  $z+dz$ . Puisque le régime est permanent, qu'il s'agit d'un volume de contrôle constitué d'un solide indéformable et qu'il n'y a pas de puissance dégagée dans l'ailette, il vient simplement :

$$\int_{\partial\Omega} -\underline{q} \cdot \underline{n} \, dA = 0$$

Sur les plans de cote  $z$  et  $z+dz$ , le flux conductif est donné par la loi de Fourier. Sur l'axe de symétrie, le flux est nul. Enfin, sur la paroi latérale, le flux convectif est associé au coefficient d'échange  $h$ . On a donc en définitive :

$$\int_{A_z} -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \, dA + \int_{A_{z+dz}} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \, dA + \int_{A_{latérale}} \varphi_{cv} \, dA = 0$$

Puisqu'on a supposé l'ailette de section constante  $\Sigma$ , il vient :

$$\int_{\Sigma} \lambda \left( \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z+dz} - \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_z \right) \, dA - h(T - T_a) \wp dz = 0$$

où  $\wp$  désigne le périmètre de l'ailette. Ce qui donne donc, si on suppose que  $T$  ne dépend que de  $z$  :

$$\lambda \Sigma \frac{d^2 T}{dz^2} - \wp h (T - T_a) = 0$$

Soit encore :

$$\frac{d^2 T}{dz^2} - \frac{\wp h}{\lambda \Sigma} (T - T_a) = 0$$

avec comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(0) = T_0 \\ -\lambda \frac{dT}{dz}(c) = h(T(c) - T_a) \end{cases}$$

Pour intégrer cette équation différentielle, on va poser :

$$m = \sqrt{\frac{\rho h}{\lambda \Sigma}}$$

On en connaît une solution particulière :

$$T(z) = T_a$$

L'équation générale sans second membre admet pour solution :

$$T(z) = A \exp(mz) + B \exp(-mz)$$

Donc la solution générale de l'équation à résoudre s'écrit :

$$T(z) = A \exp(mz) + B \exp(-mz) + T_a$$

On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes  $A$  et  $B$  :

$$T(0) = T_0 \Rightarrow A + B = T_0 - T_a$$

Par ailleurs :

$$\frac{dT}{dz} = mA \exp(mz) - mB \exp(-mz)$$

donc :

$$-\lambda \frac{dT}{dz}(c) = h(T(c) - T_a) \Rightarrow -\lambda(mA \exp(mc) - mB \exp(-mc)) = h(A \exp(mc) + B \exp(-mc))$$

qui s'écrit encore :

$$A \left[ 1 + \frac{\lambda m}{h} \right] \exp(mc) + B \left[ 1 - \frac{\lambda m}{h} \right] \exp(-mc) = 0$$

On a donc en définitive :

$$A = - \left( 1 - \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(-mc) \frac{T_0 - T_a}{\left( 1 + \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(mc) - \left( 1 - \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(-mc)}$$

$$B = \left( 1 + \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(mc) \frac{T_0 - T_a}{\left( 1 + \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(mc) - \left( 1 - \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(-mc)}$$

Qui permet d'écrire la solution analytique :

$$T(z) = T_a - \frac{\left( 1 - \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(-mc) (T_0 - T_a)}{\left( 1 + \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(mc) - \left( 1 - \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(-mc)} \exp(mz) + \frac{\left( 1 + \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(mc) (T_0 - T_a)}{\left( 1 + \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(mc) - \left( 1 - \frac{\lambda m}{h} \right) \exp(-mc)} \exp(-mz)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dT}{dz}(z) = -m \frac{(1 - \frac{\lambda m}{h}) \exp(-mc) (T_0 - T_a)}{(1 + \frac{\lambda m}{h}) \exp(mc) - (1 - \frac{\lambda m}{h}) \exp(-mc)} \exp(mz) - m \frac{(1 + \frac{\lambda m}{h}) \exp(mc) (T_0 - T_a)}{(1 + \frac{\lambda m}{h}) \exp(mc) - (1 - \frac{\lambda m}{h}) \exp(-mc)} \exp(-mz)$$

On peut donc calculer analytiquement l'efficacité de l'ailette considérée puisque :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\text{flux convectif échangé à travers } \Sigma \text{ en présence de l'ailette}}{\text{flux convectif échangé à travers } \Sigma \text{ en l'absence de l'ailette}} \\ &= \frac{-\lambda \frac{dT}{dz}(0) \Sigma}{h(T_0 - T_a) \Sigma} \end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\eta = \frac{\lambda m (1 + \frac{\lambda m}{h}) \exp(mc) + (1 - \frac{\lambda m}{h}) \exp(-mc)}{h (1 + \frac{\lambda m}{h}) \exp(mc) - (1 - \frac{\lambda m}{h}) \exp(-mc)}$$

On constate que lorsque la longueur de l'ailette augmente, l'efficacité commence par augmenter, ce qui était le résultat attendu. Mais, lorsque  $\exp(mc) \gg 1$ , i.e., en pratique, lorsque  $mc > 3$ ,  $\eta$  ne varie pratiquement plus avec la longueur de l'ailette  $c$  :

$$mc > 3 \Rightarrow \eta \sim \eta_\infty = \frac{\lambda m}{h}$$

Ainsi, au delà d'une taille critique de l'ordre de :

$$c_{cr} = \frac{3}{m} = 3 \sqrt{\frac{\lambda \Sigma}{\rho h}}$$

augmenter la longueur de l'ailette ne modifie plus le flux qu'elle permet de dissiper. Par conséquent, il faut optimiser la longueur des ailettes. De même, il faut jouer sur leur espacement pour favoriser les transferts convectifs.

On peut discuter *a posteriori* la validité de l'approximation de l'ailette. Cette approximation sera d'autant mieux vérifiée que le nombre de Biot, qui rapporte le flux convectif au flux conductif, sera petit. Ainsi, pour une ailette en acier ( $\lambda = 15 \text{ W/m/K}$ ), de largeur  $2a = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ , le nombre de Biot vaut :

$$\text{Bi} = \frac{ha}{\lambda} = 7 \times 10^{-5} \times h$$

Tant que  $\text{Bi} \ll 1$ , l'approximation de l'ailette sera justifiée, c'est-à-dire, tant que  $h \ll 1.5 \times 10^4 \text{ W/m}^2/\text{K}$ , c'est en général le cas pour les fluides

non métalliques usuels, qu'on soit en convection forcée ou en convection naturelle. Par contre, il faut faire attention la validité de l'approximation de l'ailette lorsqu'on travaille avec des métaux liquides. En pratique, on peut montrer (Cf. Taine et Petit), que tant que  $Bi < 1$ , l'erreur commise sur le flux en faisant l'approximation de l'ailette, est inférieure à 13%.

Exemple avec application numérique : soit une ailette verticale en acier ( $\lambda = 15 \text{ W/m/K}$ ), de largeur  $2a = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ , de profondeur  $10^{-2} \text{ m}$ , refroidie par convection naturelle turbulente. On considère des échanges dans l'air à  $20^\circ\text{C}$ , avec une surface maintenue à  $60^\circ\text{C}$ . Soit  $d$  la dimension caractéristique de la surface de l'ailette, la corrélation de McAdams donne :

$$Nu = \frac{hd}{\lambda} = 0.13 \times Ra^{1/3} = 0.13 \times \left( \frac{g \beta \delta T d^3}{\nu \kappa} \right)^{1/3}$$

Soit :

$$\begin{aligned} h &= 0.13 \times \lambda \times \left( \frac{g \beta \delta T Pr}{\nu^2} \right)^{1/3} \\ &= 0.13 \times 15 \times \left( \frac{10 \times 40 \times 0.7}{293 \times (1.5 \times 10^{-5})^2} \right)^{1/3} \\ &\sim 3 \times 10^3 \text{ W/m}^2/\text{K} \end{aligned}$$

Le nombre de Biot vaut :

$$Bi = \frac{3}{15} = 0.2 < 1$$

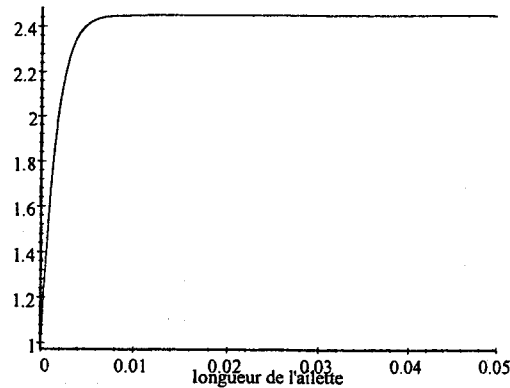
$$m = \sqrt{\frac{\phi h}{\lambda \Sigma}} = \sqrt{\frac{(4 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-2}) 3000}{15 \times (2 \times 10^{-3} \times 10^{-2})}} = 490 \text{ m}^{-1}$$

La longueur critique de l'ailette est donc :

$$c_{cr} = \frac{3}{m} = \frac{3}{490} = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

On peut tracer l'allure de l'efficacité de l'ailette avec sa longueur :

$$\begin{aligned} \eta(c) &= \frac{\lambda m \left(1 + \frac{\lambda m}{h}\right) \exp(mc) + \left(1 - \frac{\lambda m}{h}\right) \exp(-mc)}{h \left(1 + \frac{\lambda m}{h}\right) \exp(mc) - \left(1 - \frac{\lambda m}{h}\right) \exp(-mc)} \\ &= 2.45 \times \frac{3.45 \times \exp(390 \times c) - 1.45 \times \exp(-390 \times c)}{3.45 \times \exp(390 \times c) + 1.45 \exp(-390 \times c)} \end{aligned}$$



Profil type d'évolution de l'efficacité d'une ailette avec sa longueur

## 5 Le calcul des échangeurs de chaleur monophasiques en régime permanent

### 5.1 Introduction

Le principe d'un échangeur de chaleur est de transférer une certaine quantité de chaleur d'un fluide à un autre. Dans tout ce qui suit, on supposera les parois opaques de façon à ce que les transferts ne se fassent que par convection et par conduction.

Le principe général de fonctionnement d'un échangeur sans changement de phase peut être assimilé à celui d'un quadripôle avec deux entrées : fluide 1 (resp. 2) caractérisé à l'entrée par sa température de mélange  $T_{m,1}^e$  (resp.  $T_{m,2}^e$ ), son débit massique  $\dot{m}_1$  (resp.  $\dot{m}_2$ ) et sa capacité calorifique  $C_{p,1}$  (resp.  $C_{p,2}$ ), et deux sorties : fluide 1 (resp. 2) caractérisé à la sortie par sa température de mélange  $T_{m,1}^s$  (resp.  $T_{m,2}^s$ ). Le débit massique se conserve (pas de réactions chimiques ni de changement de phase) et on suppose que les capacités calorifiques des deux fluides varient peu en fonction de la température pour les régimes considérés.

On distingue différents types d'échangeurs. Une première classe est constituée des échangeurs où le courant des deux fluides se fait le long du même axe. On parle alors d'échangeur à co-courant si, de plus, les deux fluides circulent dans le même sens et d'échangeur à contre-courant dans le cas contraire. Une deuxième classe est constituée d'échangeurs où les écoulements des fluides sont brassés par des obstacles et par la turbulence des écoulements.

Dans tout ce qui suit, on supposera que l'échangeur est parfaitement isolé de l'extérieur et donc qu'il n'y a pas de pertes thermiques.

## 5.2 Résultat préliminaire : échange en conduite cylindrique entre le fluide et la paroi supposée à température constante $T_0$

On suppose la conduite cylindrique de diamètre  $D$  et d'axe  $x$ , et on notera  $\varphi$  le flux convectif échangé à la paroi entre le fluide et la paroi à l'abscisse  $x$ . On désignera par  $T_m$  la température de mélange du fluide caractérisé par sa masse volumique  $\rho$  et sa capacité calorifique  $C_p$ . Le débit est noté  $\dot{m}$ . On suppose que la symétrie de révolution est respectée. Si on fait un bilan d'énergie sur fluide contenue par le volume de contrôle défini par les sections d'abscisse  $x$  et  $x + dx$ , on a l'équation de bilan générale :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial [\rho C_p T]}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho C_p T \underline{u} \cdot \underline{n} dA = \int_{\partial\Omega} -\underline{q} \cdot \underline{n} dA + \int_{\Omega} P d\Omega$$

Ici il n'y a pas de sources de chaleur au sein du fluide. Par ailleurs on supposera que le régime est permanent et que la conduction axiale négligeable devant la convection. Il reste donc :

$$\int_{A_{x+dx}} \rho C_p T u|_{x+dx} dA - \int_{A_x} \rho C_p T u|_x dA = \varphi \pi D dx$$

soit :

$$\rho C_p \left( \int_{A_{x+dx}} T u|_{x+dx} dA - \int_{A_x} T u|_x dA \right) = \varphi \pi D dx$$

On rappelle la définition de la température de mélange :

$$T_m(x) = \frac{\int_{A_x} u T dA}{\int_{A_x} u dA} = \frac{1}{AU} \int_{A_x} u T dA$$

On a donc la relation suivante (puisque  $\dot{m} = \rho AU$ ) :

$$\dot{m} C_p \frac{dT_m}{dx} = \varphi \pi D$$

Par définition, on posera :

$$Cr = \dot{m} C_p$$

$Cr$  s'appelle le débit de capacité (capacity rate en anglais). On a donc :

$$Cr \frac{dT_m}{dx} = \varphi \pi D = \pi Dh (T_0 - T_m)$$

ou encore :

$$Cr \frac{-dT_m}{(T_0 - T_m)} = -\pi Dh dx$$

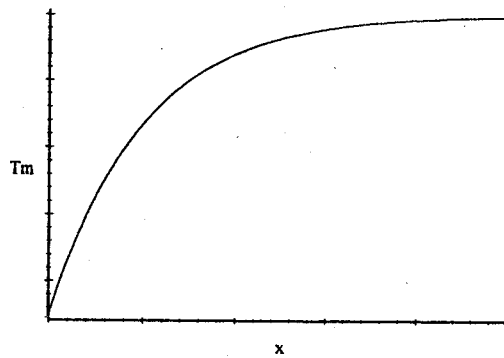
On peut intégrer cette équation entre l'entrée ( $x = 0$ ) et l'abscisse  $x$  :

$$Cr \ln \left( \frac{T_m(x) - T_0}{T_m^e - T_0} \right) = -\pi Dh x$$

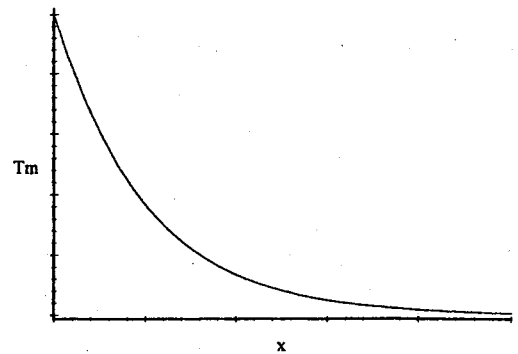
ce qui donne :

$$T_m(x) = T_0 + (T_m^e - T_0) \exp \left( -\frac{\pi Dh}{Cr} x \right)$$

Où  $T_0$  désigne la température constante de la paroi, ce qui peut être obtenu si, de l'autre côté de la paroi, se trouve un fluide restant, sur toute la longueur de la conduite, sous deux phases (liquide et vapeur). On distingue le cas évaporateur où un liquide se vaporise en prélevant des calories sur le fluide circulant à l'intérieur de la conduite (dans ce cas la température de mélange décroît suivant l'axe de la conduite en restant supérieure à  $T_0$ ), du cas condenseur où la vapeur se condense (dans ce cas la température de mélange croît suivant l'axe de la conduite en restant inférieure à  $T_0$ ).



Cas d'un condenseur



Cas d'un évaporateur

Considérons une longueur  $L$  de conduite. Si le fluide entre à la température  $T_m^e$ , l'intégration de l'équation précédente permet de déterminer la température de sortie  $T_m^s$  :

$$Cr \ln \left( \frac{T_m^s - T_0}{T_m^e - T_0} \right) = -\pi Dh L$$

Ce qui permet d'exprimer  $Cr$  en fonction des autres variables :

$$Cr = \frac{-\pi Dh L}{\ln \left( \frac{T_m^s - T_0}{T_m^e - T_0} \right)}$$

La quantité totale de chaleur apportée au fluide entre l'entrée et la sortie est :

$$\begin{aligned}
Q &= \dot{m}C_p (T_m^s - T_m^e) \\
&= Cr (T_m^s - T_m^e) \\
&= \frac{\pi DhL (T_m^e - T_m^s)}{\ln \left( \frac{T_m^s - T_0}{T_m^e - T_0} \right)}
\end{aligned}$$

On introduit les définitions suivantes :

- écart de température  $\Delta T_m$  :

$$\Delta T_m = T_m - T_0$$

- écart de température logarithmique  $\Delta T_{m,L}$  :

$$\Delta T_{m,Log} = \frac{\Delta T_m^e - \Delta T_m^s}{\ln \left( \frac{\Delta T_m^e}{\Delta T_m^s} \right)}$$

Avec ces définitions on obtient :

$$Q = -h\pi DL\Delta T_{m,Log}$$

### 5.3 Cas d'un échangeur plan

On considère le cas d'un échangeur plan à deux fluides séparés par une paroi conductrice de conductivité  $\lambda$  et d'épaisseur  $e$ . De part et d'autre de cette plaque s'écoulent un fluide dit "chaud" (indice  $c$ ) et un fluide dit "froid" (indice  $f$ ), dont les débits sont limités par deux autres parois parallèles supposées parfaitement isolées et situées à une distance  $d$  de la paroi médiane. On suppose que les écoulements se font suivant l'axe  $x$ , on désigne par  $y$  l'axe de plaque à plaque, et par  $z$  la direction perpendiculaire. On suppose que dans cette dernière direction la dimension  $l$  des plaques est suffisamment importante pour que les effets de bord soient négligeables. On désignera par  $T$  la longueur de la zone d'échange. On supposera de plus que les parois sont suffisamment peu réfléchissantes pour que le rayonnement soit négligeable et on supposera également la conduction axiale négligeable.

Les débits massiques, comptés algébriquement, seront désignés respectivement par  $\dot{m}_c$  et  $\dot{m}_f$ , et ils seront pris positifs si l'écoulement se fait dans le sens  $Ox$ . Par hypothèse on supposera que  $\dot{m}_c > 0$ . Si  $\dot{m}_f < 0$ , l'échangeur sera à contre-courant, dans le cas contraire il sera à co-courant. Pour un abscisse  $x$ , on désignera par  $T_{m,c}(x)$ ,  $T_{m,f}(x)$ ,  $T_{p,c}(x)$ ,  $T_{p,f}(x)$  les températures de mélange et de paroi côté fluide chaud et fluide froid.

Pour traiter ce problème, on effectue des bilan d'énergie sur des volumes de contrôle, côté fluide chaud et fluide froid, compris entre les sections d'abscisse  $x$

et  $x+dx$ . L'enthalpie  $dH_c$  (resp.  $dH_f$ ) du fluide chaud (resp. froid) compris dans le volume de contrôle associé vérifie (Cf. plus haut définition de la température de mélange) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(dH_c) = \dot{m}_c C_{p,c} dT_{m,c} = \int_{\partial\Omega_c} -\underline{q} \cdot \underline{n} dA + \int_{\Omega_c} P_c d\Omega \\ \frac{d}{dt}(dH_f) = \dot{m}_f C_{p,f} dT_{m,f} = \int_{\partial\Omega_f} -\underline{q} \cdot \underline{n} dA + \int_{\Omega_f} P_f d\Omega \end{cases}$$

D'une part on a ici  $P_c = P_f = 0$ , d'autre part le seul terme de flux surfacique qui intervient ici est le flux convectif au niveau de la paroi conductrice. Par ailleurs, le flux d'énergie  $d\Phi$  qui traverse la paroi conductrice sur la longueur  $dx$  considéré est donné par :

$$d\Phi = \frac{d}{dt}(dH_f) = -\frac{d}{dt}(dH_c)$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} -d\Phi = \dot{m}_c C_{p,c} dT_{m,c} = l dx h_c (T_{p,c} - T_{m,c}) \\ d\Phi = \dot{m}_f C_{p,f} dT_{m,f} = l dx h_f (T_{p,f} - T_{m,f}) \end{cases}$$

ici  $h_c$  et  $h_f$  désignent les coefficients d'échange moyennés sur la longueur de l'échangeur. On peut exprimer  $d\Phi$  en fonction de la différence entre les températures de mélange des deux fluides en appliquant la méthode des résistances thermiques. La puissance  $d\Phi$  qui transite de  $T_{m,c}$  à  $T_{m,f}$  traverse une série de résistances thermiques constituées successivement de la résistance de la couche limite convective côté fluide chaud (résistance  $\frac{1}{h_c l dx}$ ), de la résistance conductive de la paroi médiane (résistance  $\frac{e}{\lambda dx}$ ) et de la résistance de la couche limite convective côté fluide froid (résistance  $\frac{1}{h_f l dx}$ ). D'après le principe d'additivité des résistances thermiques, la résistance globale est :

$$\mathfrak{R}_g = \frac{1}{h_c l dx} + \frac{e}{\lambda dx} + \frac{1}{h_f l dx}$$

NB : on pourrait rajouter, dans l'expression précédente, des résistances d'encrassement, ce qui revient à rajouter des parois conductrices supplémentaires.

On posera  $h_g$ , coefficient d'échange global, la quantité :

$$h_g = \left( \frac{1}{h_c} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_f} \right)^{-1}$$

On a donc :

$$\mathfrak{R}_g = \frac{1}{h_g l dx} = \frac{T_{m,c} - T_{m,f}}{d\Phi}$$

ou encore :

$$d\Phi = h_g l dx (T_{m,c} - T_{m,f})$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{h_g}{h_c} (T_{m,c} - T_{m,f}) = (T_{m,c} - T_{p,c}) \\ \frac{h_g}{h_f} (T_{m,c} - T_{m,f}) = (T_{p,f} - T_{m,f}) \end{cases}$$

et le système initial se simplifie en :

$$\begin{cases} \dot{m}_c C_{p,c} dT_{m,c} = -h_g l dx (T_{m,c} - T_{m,f}) \\ \dot{m}_f C_{p,f} dT_{m,f} = h_g l dx (T_{m,c} - T_{m,f}) \end{cases}$$

On transforme le système de la façon suivante :

$$\begin{cases} dT_{m,c} = -\frac{h_g l dx}{\dot{m}_c C_{p,c}} (T_{m,c} - T_{m,f}) \\ dT_{m,f} = \frac{h_g l dx}{\dot{m}_f C_{p,f}} (T_{m,c} - T_{m,f}) \end{cases}$$

Ce qui donne en posant  $\Delta T_m = T_{m,c} - T_{m,f}$  :

$$\frac{d}{dx} (\Delta T_m) = -\left( \frac{h_g l dx}{\dot{m}_f C_{p,f}} + \frac{h_g l dx}{\dot{m}_c C_{p,c}} \right) \Delta T_m$$

qui s'intègre entre l'entrée ( $x = 0$ ) et la section  $x$  :

$$\Delta T_m(x) = \Delta T_m(0) \exp\left(-h_g l \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}}\right) x\right)$$

Ce qui donne aussi :

$$\ln\left(\frac{\Delta T_m(L)}{\Delta T_m(0)}\right) = -h_g l L \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}}\right)$$

Si on reporte l'expression de  $\Delta T_m(x)$  dans l'équation qui donnent  $T_{m,c}$ , on obtient :

$$dT_{m,c} = -\frac{h_g l}{\dot{m}_c C_{p,c}} \Delta T_m(0) \exp\left(-h_g l \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}}\right) x\right) dx$$

qui s'intègre en :

$$\frac{T_{m,c}(x) - T_{m,c}(0)}{T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)} = \frac{\dot{m}_f C_{p,f}}{(\dot{m}_f C_{p,f} + \dot{m}_c C_{p,c})} \left[ \exp\left(-h_g l \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}}\right) x\right) - 1 \right]$$

De même l'équation :

$$dT_{m,f} = \frac{h_g l dx}{\dot{m}_f C_{p,f}} \Delta T_m(0) \exp\left(-h_g l \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}}\right) x\right)$$

s'intègre en :

$$\frac{T_{m,f}(x) - T_{m,f}(0)}{T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)} = -\frac{\dot{m}_c C_{p,c}}{(\dot{m}_f C_{p,f} + \dot{m}_c C_{p,c})} \left[ \exp \left( -h_g l \left( \frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}} \right) x \right) - 1 \right]$$

Ce qui permet de calculer les écarts de température chaude et froide entre l'entrée et la sortie, en posant  $S_{\max} = Ll$  :

$$\begin{cases} \frac{T_{m,c}(0) - T_{m,c}(L)}{T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)} = \frac{\dot{m}_f C_{p,f}}{(\dot{m}_f C_{p,f} + \dot{m}_c C_{p,c})} \left[ 1 - \exp \left( -h_g S_{\max} \left( \frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}} \right) \right) \right] \\ \frac{T_{m,f}(L) - T_{m,f}(0)}{T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)} = \frac{\dot{m}_c C_{p,c}}{(\dot{m}_f C_{p,f} + \dot{m}_c C_{p,c})} \left[ 1 - \exp \left( -h_g S_{\max} \left( \frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}} \right) \right) \right] \end{cases}$$

NB : On peut montrer que les expressions précédentes sont valables pour les échangeurs à co-courant ( $\dot{m}_f > 0$ ) comme pour les échangeurs à contre courant ( $\dot{m}_f < 0$ ), et que la section soit rectangulaire, cylindrique, triangulaire. Si l'échangeur est tel que la surface  $S_{\max}$  offerte à l'un des deux fluides est plus importante que la surface offerte à l'autre (par exemple pour un échangeur annulaire ou un faisceau de tubes, le coefficient d'échange global  $h_g$  est alors rapporté, par convention à  $S_{\max}$ .

NB : Si  $\dot{m}_f C_{p,f} \rightarrow \infty$  (resp.  $\dot{m}_c C_{p,c} \rightarrow \infty$ ), alors  $T_{m,f}(x) = T_{m,f}(0) =$  constante (resp.  $T_{m,c}(x) = T_{m,c}(0) =$  constante) et on est ramené au cas de l'évaporateur (resp. du condenseur parfait) traité plus haut.

## 5.4 Calcul du flux de chaleur échangé

Le flux de chaleur échangé sur la longueur totale de l'échangeur est donné par :

$$\Phi = -\dot{m}_c C_{p,c} (T_{m,c}(L) - T_{m,c}(0)) = \dot{m}_f C_{p,f} (T_{m,f}(L) - T_{m,f}(0))$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{\dot{m}_c C_{p,c}} &= -(T_{m,c}(L) - T_{m,c}(0)) \\ \frac{\Phi}{\dot{m}_f C_{p,f}} &= (T_{m,f}(L) - T_{m,f}(0)) \end{aligned}$$

d'où :

$$\Phi \left( \frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}} \right) = (T_{m,f}(L) - T_{m,f}(0)) - (T_{m,c}(L) - T_{m,c}(0))$$

Si on utilise la relation établie plus haut :

$$\ln \left( \frac{\Delta T_m(L)}{\Delta T_m(0)} \right) = -h_g S_{\max} \left( \frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}} \right)$$

on en tire :

$$\frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}} = \frac{-1}{h_g S_{\max}} \ln \left( \frac{\Delta T_m(L)}{\Delta T_m(0)} \right)$$

d'où :

$$\Phi \left( \frac{-1}{h_g S_{\max}} \ln \left( \frac{\Delta T_m(L)}{\Delta T_m(0)} \right) \right) = (T_{m,f}(L) - T_{m,f}(0)) - (T_{m,c}(L) - T_{m,c}(0))$$

soit :

$$\Phi = h_g S_{\max} \frac{(T_{m,c}(L) - T_{m,c}(0)) - (T_{m,f}(L) - T_{m,f}(0))}{\ln \left( \frac{\Delta T_m(L)}{\Delta T_m(0)} \right)}$$

ou encore :

$$\Phi = h_g S_{\max} \frac{(T_{m,c}(L) - T_{m,f}(L)) - (T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0))}{\ln \left( \frac{\Delta T_m(L)}{\Delta T_m(0)} \right)}$$

et si on pose :

$$\Delta T_{m, \text{Log}} = \frac{\Delta T_m(0) - \Delta T_m(L)}{\ln \left( \frac{\Delta T_m(0)}{\Delta T_m(L)} \right)}$$

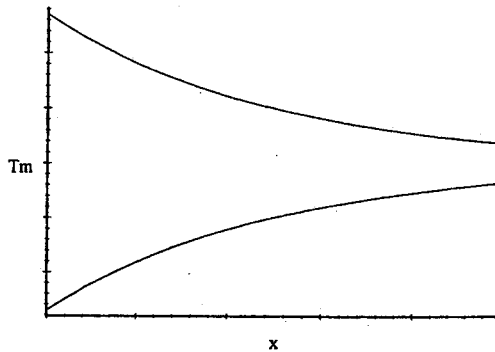
il vient en définitive, comme dans le cas à température de paroi constante et que l'échangeur soit à co-courant ou à contre-courant :

$$\Phi = h_g S_{\max} \Delta T_{m, \text{Log}}$$

## 5.5 Allure de l'évolution de la température dans les différents types d'échangeur

Echangeur à co-courant ( $m_f > 0$ )

Dans un échangeur à co-courant les températures des deux fluides tendent à converger en sortie.



Evolution des températures dans un échangeur à co-courant

Echangeur à contre-courant ( $\dot{m}_f < 0$ )

Plusieurs cas sont à distinguer suivant le signe de  $\dot{m}_c C_{p,c} + \dot{m}_f C_{p,f}$ .

Le cas particulier  $\dot{m}_c C_{p,c} + \dot{m}_f C_{p,f} = 0$  donne :

$$\frac{d}{dx} (\Delta T_m) = 0$$

d'où l'on déduit :

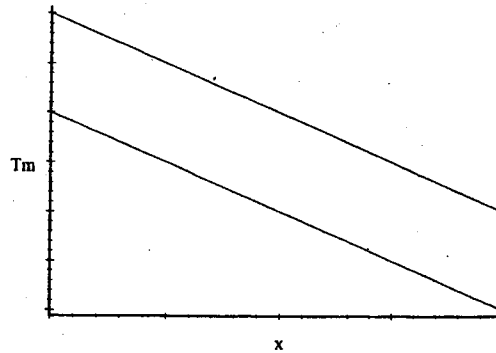
$$\Delta T_m(x) = T_{m,c}(x) - T_{m,f}(x) = \text{constante} = T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} dT_{m,c} = -\frac{h_0 l dx}{\dot{m}_c C_{p,c}} (T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)) \\ dT_{m,f} = \frac{h_0 l dx}{\dot{m}_f C_{p,f}} (T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)) \end{cases}$$

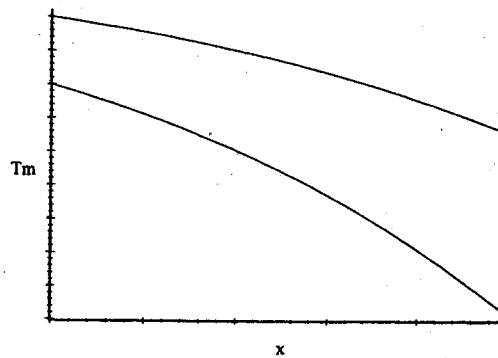
qui s'intègre directement et donne des profils linéaires de température :

$$\begin{cases} T_{m,c}(x) - T_{m,c}(0) = -\frac{h_0 l}{\dot{m}_c C_{p,c}} (T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)) x \\ T_{m,f}(x) - T_{m,f}(0) = \frac{h_0 l}{\dot{m}_f C_{p,f}} (T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)) x \end{cases}$$



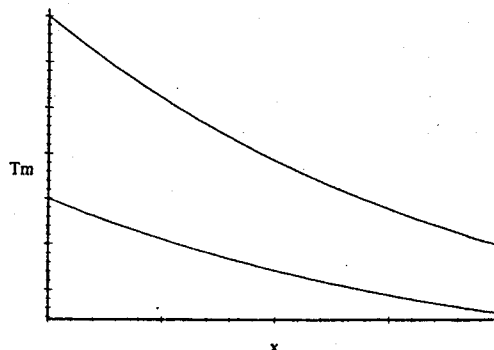
Echangeur à contre-courant avec  $\dot{m}_c C_{p,c} + \dot{m}_f C_{p,f} = 0$ , cas où la température de sortie du fluide froid est supérieure à la température de sortie du fluide chaud.

Le cas  $\dot{m}_c C_{p,c} + \dot{m}_f C_{p,f} > 0$  correspond aux situations suivantes :



Echangeur à contre-courant avec  $\dot{m}_c C_{p,c} + \dot{m}_f C_{p,f} > 0$ , cas où la température de sortie du fluide froid est supérieure à la température de sortie du fluide chaud.

Le cas  $\dot{m}_c C_{p,c} + \dot{m}_f C_{p,f} < 0$  correspond aux situations suivantes :



Echangeur à contre-courant avec  $\dot{m}_c C_{p,c} + \dot{m}_f C_{p,f} < 0$ , cas où la température de sortie du fluide froid est supérieure à la température de sortie du fluide chaud.

Dans tous les cas, il apparaît que, pour un échangeur à contre-courant, le fluide froid peut ressortir plus chaud que ne sort le fluide chaud :  $T_{m,f}(0) > T_{m,c}(L)$ , ce qui est impossible avec un échangeur à co-courant. Les échangeurs à contre-courant apparaissent donc comme plus performants que les échangeurs à co-courant.

## 5.6 Efficacité d'un échangeur, nombre d'unités de transfert

### Définitions

On a considéré plus haut que le débit était algébrique, de façon à pouvoir traiter à la fois le cas des échangeurs à co-courant et celui des échangeurs à contre-courant. Par contre, le débit de capacité, par définition, reste positif. On notera donc :

$$\begin{cases} Cr_c = |\dot{m}_c C_{p,c}| \\ Cr_f = |\dot{m}_f C_{p,f}| \end{cases}$$

et on posera :

$$\begin{cases} Cr_{\min} = \inf(\dot{m}_c C_{p,c}, \dot{m}_f C_{p,f}) = \inf(Cr_c, Cr_f) \\ Cr_{\max} = \sup(\dot{m}_c C_{p,c}, \dot{m}_f C_{p,f}) = \sup(Cr_c, Cr_f) \end{cases}$$

Le flux de chaleur total échangé s'écrit :

$$|\Phi| = Cr_c |T_{m,c}(L) - T_{m,c}(0)| = Cr_f |T_{m,f}(L) - T_{m,f}(0)|$$

Par définition le fluide froid sort plus chaud qu'il ne rentre et c'est l'inverse pour le fluide chaud. Don en notant avec un exposant  $e$  (resp.  $s$ ) les grandeurs relatives à l'entrée (resp. à la sortie), on a :

$$|\Phi| = Cr_c (T_{m,c}^e - T_{m,c}^s) = Cr_f (T_{m,f}^s - T_{m,f}^e)$$

On définit l'efficacité de l'échangeur (quantité sans dimension notée  $E$ ) par :

$$E = \frac{|\Phi|}{|\Phi_{th}|}$$

où  $\Phi_{th}$  est le flux maximal, théoriquement transmissible dans l'échangeur. Pour exprimer  $\Phi_{th}$ , il faut considérer qu'un des fluides subit la variation maximale de température autorisée par le second principe à savoir  $T_{m,c}^e - T_{m,f}^e$  (ce qui correspondrait par exemple à un échangeur à contre-courant de longueur infinie). Seul le fluide de plus petit débit de capacité peut subir cette variation. On a donc :

$$E = \frac{Cr_c (T_{m,c}^e - T_{m,c}^s)}{Cr_{\min} (T_{m,c}^e - T_{m,f}^e)} = \frac{Cr_f (T_{m,f}^s - T_{m,f}^e)}{Cr_{\min} (T_{m,c}^e - T_{m,f}^e)}$$

Par définition,  $E$  varie entre 0 et 1.

On définit le nombre d'unités de transfert (nombre sans dimension noté NUT) la quantité :

$$NUT = \frac{h_g S_{\max}}{Cr_{\min}}$$

où on rappelle que  $S_{\max}$  est la surface d'échange la plus importante,  $h_g$  le coefficient d'échange global de l'échangeur (rapporté à  $S_{\max}$ ) et  $Cr_{\min}$  le débit de capacité minimal.

En pratique on peut toujours exprimer :

$$E = f \left( NUT, \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}} \right)$$

Ainsi, pour tous les échangeurs, il existe des courbes représentant  $E$  en fonction de NUT et qui sont paramétrées en fonction du rapport  $\frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}$ . En règle générale, l'efficacité est d'autant plus élevée que :

- le nombre d'unités de transfert est plus important (surface d'échange et coefficient élevés),
- que le rapport  $\frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}$  est faible (toutefois le cas limite où l'un des fluides a un débit négligeable est sans intérêt en pratique).

Calcul de l'efficacité d'un échangeur à co-courant

On supposera que  $Cr_{\min} = Cr_f$  pour établir cette expression. On pourra vérifier qu'elle reste vraie si  $Cr_{\min} = Cr_c$ . On peut reprendre directement les relations précédentes puisque  $Cr_f = \dot{m}_f C_{p,f} = \dot{m}_f C_{p,f}$ . Par ailleurs,

$$\begin{cases} T_{m,c}^e = T_{m,c}(0) \\ T_{m,c}^s = T_{m,c}(L) \\ T_{m,f}^e = T_{m,f}(0) \\ T_{m,f}^s = T_{m,f}(L) \end{cases}$$

On a donc, d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned} E &= \frac{Cr_c (T_{m,c}(0) - T_{m,c}(L))}{Cr_{\min} (T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0))} \\ &= \frac{Cr_c}{Cr_{\min}} \frac{\dot{m}_f C_{p,f}}{(\dot{m}_f C_{p,f} + \dot{m}_c C_{p,c})} \left[ 1 - \exp \left( -h_g S_{\max} \left( \frac{1}{\dot{m}_c C_{p,c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p,f}} \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{1 + \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{h_g S_{\max}}{Cr_{\min}} \left( 1 + \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

soit en définitive :

$$E = \frac{1 - \exp \left( -NUT \left( 1 + \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}} \right) \right)}{1 + \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}}$$

Calcul de l'efficacité d'un échangeur à contre-courant

On supposera toujours que  $Cr_{\min} = Cr_f$  et on pourra vérifier de même que cette hypothèse n'a pas d'influence sur le résultat obtenu. Ici on a  $Cr_f = |\dot{m}_f C_{p,f}| = -\dot{m}_f C_{p,f}$  et :

$$\begin{cases} T_{m,c}^e = T_{m,c}(0) \\ T_{m,c}^s = T_{m,c}(L) \\ T_{m,f}^e = T_{m,f}(L) \\ T_{m,f}^s = T_{m,f}(0) \end{cases}$$

L'efficacité est alors donnée par :

$$\begin{aligned} E &= \frac{Cr_c (T_{m,c}(0) - T_{m,c}(L))}{Cr_{\min} (T_{m,c}(0) - T_{m,f}(L))} \\ &= \frac{Cr_{\max} (T_{m,c}(0) - T_{m,c}(L))}{Cr_{\min} ((T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)) + (T_{m,f}(0) - T_{m,f}(L)))} \\ &= \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\min}} \frac{\frac{T_{m,c}(0) - T_{m,c}(L)}{T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)}}{1 + \frac{T_{m,f}(0) - T_{m,f}(L)}{T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)}} \end{aligned}$$

On peut utiliser les expressions établies plus haut qui deviennent ici :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{T_{m,c}(0) - T_{m,c}(L)}{T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)} &= \frac{-Cr_f}{-Cr_f + Cr_c} \left[ 1 - \exp \left( -h_g S_{\max} \left( \frac{1}{Cr_c} + \frac{1}{-Cr_f} \right) \right) \right] \\ \frac{T_{m,f}(L) - T_{m,f}(0)}{T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)} &= \frac{Cr_c}{-Cr_f + Cr_c} \left[ 1 - \exp \left( -h_g S_{\max} \left( \frac{1}{Cr_c} + \frac{1}{-Cr_f} \right) \right) \right] \end{aligned} \right\}$$

on a donc :

$$\frac{T_{m,c}(0) - T_{m,c}(L)}{T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)} = \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\min} - Cr_{\max}} \left[ 1 - \exp\left(\frac{h_g S_{\max}}{Cr_{\min}} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)\right]$$

et :

$$\frac{T_{m,f}(L) - T_{m,f}(0)}{T_{m,c}(0) - T_{m,f}(0)} = \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\max} - Cr_{\min}} \left[ 1 - \exp\left(\frac{h_g S_{\max}}{Cr_{\min}} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)\right]$$

il vient donc en définitive :

$$E = \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\min}} \frac{\frac{Cr_{\min}}{Cr_{\min} - Cr_{\max}} \left[ 1 - \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)\right]}{1 - \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\max} - Cr_{\min}} \left[ 1 - \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)\right]}$$

$$E = \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\min}} \frac{\frac{Cr_{\min}}{Cr_{\min} - Cr_{\max}} \left[ 1 - \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)\right]}{1 - \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\max} - Cr_{\min}} \left[ 1 - \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)\right]}$$

$$E = \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\min}} \frac{\frac{Cr_{\min}}{Cr_{\min} - Cr_{\max}} \left[ 1 - \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)\right]}{\frac{Cr_{\max} - Cr_{\min}}{Cr_{\max} - Cr_{\min}} - \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\max} - Cr_{\min}} + \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\max} - Cr_{\min}} \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)}$$

$$E = \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\min}} \frac{\frac{Cr_{\min}}{Cr_{\min} - Cr_{\max}} \left[ 1 - \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)\right]}{\frac{-Cr_{\min}}{Cr_{\max} - Cr_{\min}} + \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\max} - Cr_{\min}} \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)}$$

$$E = \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\min}} \frac{1 - \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)}{1 - \frac{Cr_{\max}}{Cr_{\min}} \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)}$$

$$E = \frac{1 - \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)}{\frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}} - \exp\left(\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)}$$

en multipliant en haut et en bas cette expression par  $-\exp\left(-\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)$  on obtient l'expression que l'on trouve dans la littérature (Cf. Taine et Petit par exemple) :

$$E = \frac{1 - \exp\left(-\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)}{1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}} \exp\left(-\text{NUT} \left(1 - \frac{Cr_{\min}}{Cr_{\max}}\right)\right)}$$